多重ゼータ値とリーマンゼータ値 (代数的整数論とその周辺)

大野, 泰生

数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 129-136

多重ゼータ値とリーマンゼータ値

近畿大学 理工学部 大野泰生 (Yasuo Ohno)

多重ゼータ値については金子先生による文献「多重ゼータ値入門」[10] に詳しい解説がなされている。また、最近の金子先生との共著文献 [11] において、多重ゼータ値間の線型関係式についてのことを、その時点である程度丁寧に解説できたと思う。今回の講演の前半では、多重ゼータ値研究者の問題意識のひとつである「各 weight の多重ゼータ値たちのなす $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の次元 (の上限) はいくらか?」を意識して、具体的に一般形が書ける線型関係式の系列と予想次元についてお話した。この部分の内容は、Hoffman's harmonic algebra における derivation や cyclic derivation として sum formula の一般化や cyclic sum formula を解釈する話題とともに上述の文献 [11] に説明があるので、本稿で重ねて記述することは避けることとしたい。また、cyclic sum formula の証明と、それによる sum formula の別証明については、[16] に書かせていただいた。

そこでここでは「多重ゼータ値の和がリーマンゼータ値で書けるのはいつか?」という、もう一つの問題意識に従って述べた、講演の後半部分を中心に書こうと思う。上記3文献に書かれていない多重S値についての結果と Zagier 氏との共同の結果を書くことを目標としたい。

1 多重ゼータ値とリーマンゼータ値

まずはじめに、多重ゼータ値を定義する。

整数からなる index set $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ において $n\geq 1$, $k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}\geq 1$ および $k_n\geq 2$ が満たされるとき、これを admissible index と呼ぶ。ここで、$\mathrm{wt}(\mathbf{k})=k=k_1+k_2+\cdots+k_n$ を $\mathbf{k}$ の weight と言い、$\mathrm{dep}(\mathbf{k})=n$ を $\mathbf{k}$ の depth と呼ぶ。admissible index $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対する多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ を、

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=\sum_{0<m_1<m_2<\cdots<m_n}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_n}^{k_n}}$$

で定義する。admissible index に対してこの級数は収束する。

多重ゼータ値には反復積分表示 (cf.[18]) と呼ばれる以下の表記が知られていてと

ても有効である。

$$\zeta(k_1,\ldots,k_n)=I(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_1-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2-1},\ldots,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_n-1}),$$

ただしここで $\varepsilon_1=1, \varepsilon_k=0, \varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{k-1}\in\{0,1\}$ とし、$A_0(t)=t$, $A_1(t)=1-t$ とするとき、

$$I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)=\int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\frac{dt_1}{A_{\varepsilon_1}(t_1)}\cdots\frac{dt_k}{A_{\varepsilon_k}(t_k)}$$

とする。

講演で述べた duality formula や、sum formula と duality formula の拡張の定理 (cf. [11]) の証明にも上述の反復積分表示が有効である。

index にある制限を設けたときの多重ゼータ値の和がリーマンゼータ値で書けるものの典型として、まず sum formula を復習しておく。以下のように、 weight と depth を固定した多重ゼータ値の和が、その weight の リーマンゼータ値に一致するという定理である。

定理 1 (sum formula [2][19]) $0<n<k$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=n}}\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k).$$

sum formula の証明は Granville と Zagier と Ochiai によるものが知られていたが、今回の講演で述べた cyclic sum formula の証明を用いると母関数の議論や反復積分の議論を用いることなく比較的初等的に再証明できる。このことは、[16] に解説したので参考にしていただきたい。

一方、偶数 weight に限られるのだが、ある制限下での多重ゼータ値の和が、同じ weight のリーマンゼータ値（つまり π の weight 乗）の有理数倍で書けることが、結び目の不変量の議論から知られている。この関係式の原論文での表記法は、我々の記述と異なっているのでこれを我々の書き方に直すために、height という index を以下のように定義すると好都合である。

$\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対して height $\mathrm{ht}(\mathbf{k})$ を

$$\mathrm{ht}(\mathbf{k})=s=\#\{i|k_i\geq 2\}$$

で定義する。

定理 2 (T. Q. T. Le and J. Murakami [12]) $1 \le s \le k$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=2k,\ \mathrm{ht}(\mathbf{k})=s}} (-1)^{\mathrm{dep}(\mathbf{k})}\zeta(\mathbf{k}) = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\sum_{r=0}^{k-s}\binom{2k-1}{2r}(2-2^{2r})B_{2r}\pi^{2k}.$$

つまり偶数 weight と height を固定して、depth の偶奇に応じて符号を変えて多重ゼータ値の和を取ると、その weight のリーマンゼータ値の有理数倍になるという定理である。奇数 weight の場合は dual の多重ゼータ値同士が異符号になるため duality formula により打ち消し合って、左辺は常に零になってしまうのである。

2 多重S値とリーマンゼータ値

まず多重S値を定義する。admissible index $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ に対して $S(\mathbf{k})$ を、

$$S(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{0<m_1\le m_2\le\cdots\le m_n} \frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}\cdots{m_n}^{k_n}}$$

で定義する。本稿では便宜上、この $S(\mathbf{k})$ のことを、“多重S値” と呼ぶことにしたい。admissible index に対してこの級数は収束する。

多重S値と多重ゼータ値の間には関係があって、互いに他を線型結合で書くことができる。これは、和が絶対収束していることから、和のところの大小関係の条件を、等号成立時と不等号成立時とに分けることにより導かれる。例えば、以下のような関係式である。

$$S(k_1, k_2) = \zeta(k_1, k_2) + \zeta(k_1 + k_2),$$

$$\zeta(k_1, k_2) = S(k_1, k_2) - S(k_1 + k_2),$$

$$S(k_1,k_2, k_3) = \zeta(k_1, k_2, k_3) + \zeta(k_1 + k_2, k_3) + \zeta(k_1, k_2 + k_3) + \zeta(k_1 + k_2 + k_3),$$

$$\zeta(k_1,k_2, k_3) = S(k_1, k_2, k_3) - S(k_1 + k_2, k_3) - S(k_1, k_2 + k_3) + S(k_1 + k_2 + k_3),$$

$$S(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, k-n+1) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{a_1+\cdots+a_l=n}\zeta(a_1, \ldots, a_{l-1}, k-n+a_l).$$

従って、各 weight の多重ゼータ値と多重S値のなす $\mathbf{Q}$ ベクトル空間は一致する。

定義から明らかなように、多重ゼータ値と多重S値はともに、リーマンゼータ関数の一種の多重化（の関数の特殊値）である。多重ゼータ値研究の起源と考えられている Euler が研究していたのは、depth が 2 の場合の多重S値である。Euler 以後も

この多重S値は、研究者達によって扱われ続け、例えば近年では、M. Hoffman ([3]) でも、多重ゼータ値と同等に扱われ、研究されている（この論文の中で Hoffman がこの級数に S という記号を用いている)。

この多重S値の言葉で sum formula を以下のように述べ直すことができる。やはり weight と depth を固定した下での和が、同じ weight のリーマンゼータ値の有理数倍になる。

定理 3 (sum formula [2][19], cf.[3]) $0 < n < k$ に対して

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=n}} S(\mathbf{k}) = \binom{k-1}{n-1}\zeta(k).$$

一方、前節の後半で導入した height に注目すると、多重S値についてはどのようなことが起こるのだろうか。次の左辺は、weight を固定し、height を 1 に固定した場合の多重S値の和になっている。これがやはり、同じ weight のリーマンゼータ値の有理数倍になる。

定理 4 任意の整数 $k \geq 2$ に対して次が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{k-1} S(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},k-n+1) = 2(k-1)(1-2^{1-k})\zeta(k).$$

この定理の証明にも反復積分表示を用いている。しかしそのことがこの定理の拡張である次の予想の証明のネックになっている。

予想 1 任意の正整数 $k > 1$ と $s \leq \frac{k}{2}$ に対して以下を予想する。

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible} \\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{ht}(\mathbf{k})=s}} S(\mathbf{k}) = 2\binom{k-1}{2s-1}(1-2^{1-k})\zeta(k).$$

sum formula は、weight と depth を固定した上での多重ゼータ値（または多重S値）の和が、同じ weight のリーマンゼータ値の有理数倍であるという定理であった。上記の予想は、これに対して、weight と height とを固定した上での和の公式（の予想）と見なすことができ、やはり和は同じ weight のリーマンゼータ値の有理数倍と予想されているわけである。

上記の予想の形の多重S値の和の場合（ weight が k で height が s とすると)、反復積分表示した時の k 回の反復積分を $2s$ 回の反復積分にまで減らすことは容易

である。一方右辺のリーマンゼータ関数の積分表示は通常、1 回の積分であるから残りの $2s-1$ 回分の積分をどう計算するかが問題になったが、現在のところ $s=1$ の場合にしか計算に成功していないわけである。

3 再び、多重ゼータ値とリーマンゼータ値

このように見てくると、新たに導入した height という index の持つ意味はまだ不鮮明ながらも、リーマンゼータ値で書ける和を構成するときに index に制限を加えるための「仕切り」としては有効であろうという想像が湧く。そこで改めてこれまでに知られている関係式を眺めなおしてみると、例えば Euler による下記の関係式は、weight が k, depth が 2, height が 1 の場合の和と受けとめられることに気付く。

定理 5 (Euler)

$$\zeta(1,k-1)=\frac{k-1}{2}\zeta(k)-\frac{1}{2}\sum_{r=2}^{k-2}\zeta(r)\zeta(k-r).$$

同様にして見ていくと、この 3 つの index を固定した和は結構たくさん知られていて、以下のような場合に値の所属が判明している。(具体的な値は、判明している場合でもここでは省略して所属のみを書いた)。ここで、

$$F(k,n,s)=\sum_{\substack{\mathbf{k}:\text{admissible}\\ \mathrm{wt}(\mathbf{k})=k,\ \mathrm{dep}(\mathbf{k})=n,\ \mathrm{ht}(\mathbf{k})=s}}\zeta(\mathbf{k})$$

と定義し、R_k を $\mathbf{Q}[\pi^2,\zeta(3),\zeta(5),\zeta(7),\zeta(9),\ldots]$ の weight が k の部分（ゼータ値の積の weight は、各々のゼータ値の weight の和と考える。）とする。

$F(k,2,1)=\zeta(1,k-1),\ F(k,2,2)\in R_k$	Euler
$F(k,n,n)\in R_k$	Hoffman, Kaneko
$F(k,n,1)=\zeta(1,\ldots,1,k-n+1)\in R_k$	Aomoto, Drinfel'd, Zagier
$F(2n,n,n)=\zeta(2,2,\ldots,2)\in \mathbf{Q}\zeta(2n)$	Euler(?)
$F(2n+1,n,n)\in R_{2n+1}$	Kaneko

そこで、$F(k,n,s)$ の母関数を以下で定義する。

$$\Phi_0(x,y,z)=\sum_{k,n,s}F(k,n,s)\,x^{k-n-s}\,y^{n-s}\,z^{s-1}\quad\in\mathbf{R}[[x,y,z]]$$

ここで、和は $s\geq 1$, $n\geq s$, $k\geq n+s$ すなわち、admissible index が存在する全ての k,n,s の組を走る。この時、Zagier 氏との共同研究により以下の定理を得た。

定理 6 ([15])

$$\Phi_0(x,y,z) = \frac{1}{xy-z}\left(1 - \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n}S_n(x,y,z)\right)\right),$$

ただしここで多項式 $S_n(x,y,z) \in \mathbf{Z}[x,y,z]$ は、

$$S_n(x,y,z) = x^n + y^n - \alpha^n - \beta^n, \qquad \alpha, \beta = \frac{x+y\pm\sqrt{(x+y)^2-4z}}{2}$$

もしくは

$$\log\left(1 - \frac{xy-z}{(1-x)(1-y)}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{S_n(x,y,z)}{n}$$

で定義されるものである。従って特に、*admissible index* が存在するような k, n, s の組（すなわち、$s \geq 1,\ n \geq s,\ k \geq n+s$）に対して

$$F(k,n,s) \in R_k$$

である。

この定理を特殊化することにより、sum formula や

$$\zeta(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{s}) = \frac{\pi^{2s}}{(2s+1)!},$$

$$\sum_{a,b\geq 1}\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{a-1},b+1)\,x^a y^b = \Phi_0(x,y,0) = \frac{1}{xy}\left(1-\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\,\frac{x^n+y^n-(x+y)^n}{n}\right)\right)$$

などの既知の公式（下段の公式は [19] より）が再証明される。

附記： 本稿で扱った関係式のうち、多重S値に対して weight と height を固定することによって得られる関係式（定理４と予想１）は、以前の sum formula と duality formula の一般化の定理と比較して、新たな（独立な）関係式を含んでいる。また、講演で述べた cyclic sum formula もまた、以前の一般化の定理と比較して、新たな（独立な）関係式を含んでいる系列である。しかし、これら全てを合わせても、予想次元にはまだ至らない。

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions. *Nagoya Math. J.*, **153** (1999), 1-21.

[2] A. Granville, A decomposition of Riemann's zeta-function. in London Math. Soc. Lecture Note Ser. 247, Cambridge, 1997, pp. 95-101.

[3] M. Hoffman, Multiple harmonic series. *Pacific J. Math.*, **152** (1992), 275-290.

[4] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series. *J. Algebra*, **194** (1997), 477-495.

[5] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression. Prepint (QA/0010140) 2000.

[6] J. G. Huard, K. S. Williams and Zhang Nan-Yue, On Tornheim's double series. *Acta Arithmetica*, **75-2** (1996), 105-117.

[7] K. Ihara and M. Kaneko, Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values. In preparation.

[8] M. Kaneko, Poly-Bernoulli numbers. *J. de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **9** (1997), 221-228.

[9] 金子昌信, 多重ゼータ値と多重ベルヌーイ数. 都立大学数学教室セミナー報告, 1998.

[10] 金子昌信, 多重ゼータ値入門. 代数的整数論シンポジウム講演報告集, 数理解析研究所講究録, **1097** (1999) 50-68.

[11] 金子昌信 大野泰生, 多重ゼータ値の関係式について. 第45回代数学シンポジウム報告集, (2000) 48-64.

[12] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions. *Topology and its Applications*, **62** (1995), 193-206.

[13] K. Matsumoto, On analytic continuation of various multiple zeta-functions. Preprint, 2000.

[14] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values. *J. Number Theory*, **74** (1999) 39-43.

[15] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height. Preprint, 2000.

[16] 大野泰生, A proof of the cyclic sum conjecture for multiple zeta values. 保型形式シンポジウム報告集, 数理解析研究所講究録, **1173** (2000) 192-199.

[17] L. Tornheim, Harmonic double series. *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 303-314.

[18] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications. In Proceedings of ECM 1992, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.

[19] D. Zagier, Multiple zeta values. Unpublished preprint, Bonn, 1995.

Yasuo Ohno
Department of Mathematics
Kinki University
Higashi-Osaka, 577-8502, Japan
e-mail: ohno@math.kindai.ac.jp